



Language: Romanian

Day: 1

16 aprilie 2020

Problema 1. Numerele naturale nenule $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ verifică relația

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n, \text{ pentru } n = 0, 1, 2, \dots, 3028.$$

Demonstrați că cel puțin unul dintre numerele $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ este divizibil cu 2^{2020} .

Problema 2. Determinați toate listele $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ de numere reale nenegative care verifică, simultan, următoarele trei condiții:

(i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;

(ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;

(iii) există o permutare $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ a listei $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ astfel încât

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

O permutare a unei liste este o listă de aceeași lungime, alcătuită din aceleași elemente, dar ordinea elementelor poate fi alta. De exemplu, $(2, 1, 2)$ este o permutare a listei $(1, 2, 2)$, și amândouă sunt permutări ale listei $(2, 2, 1)$. Fiecare listă este o permutare a ei însăși.

Problema 3. Fie $ABCDEF$ un hexagon convex astfel încât $\angle A = \angle C = \angle E$, $\angle B = \angle D = \angle F$ și bisectoarele (interioare) ale unghiurilor $\angle A$, $\angle C$ și $\angle E$ sunt concurente.

Demonstrați că bisectoarele (interioare) ale unghiurilor $\angle B$, $\angle D$ și $\angle F$ sunt, de asemenea, concurente.

Am notat $\angle A = \angle FAB$. Celelalte unghiuri interioare ale hexagonului au o descriere asemănătoare.

Language: Romanian

Timp: 4 ore și 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte

Pentru ca acesta să fie un concurs corect și plăcut pentru toată lumea, vă rugăm să nu menționați, sau să nu faceți vreo referire la probleme pe internet sau pe rețelele de socializare până duminică, 19 aprilie, ora 1:00 am (ora României).