luni, 11. iulie 2022

Problema 1. Banca din Oslo a emis două tipuri de monede: de argint (notată cu A) și de bronz (notată cu B). Marianne are n monede de argint și n monede de bronz. Cele $2n$ monede sunt așezate într-o secvență în linie, de la stânga la dreapta, într-o ordine inițială arbitrară. Se numește *bloc* orice subsecvență de monede consecutive de același tip. Pentru un număr natural nenul fixat $k \leqslant 2n$, Marianne efectuează repetat următoarea operație: ea identifică cel mai lung bloc care conține moneda de pe poziția k, numărată de la stânga, și mută toate monedele acestui bloc la capătul din stânga, înaintea tuturor celorlalte monede. De exemplu, dacă $n = 4$ și $k = 4$, procesul care începe cu configurația $AABBBABA$ va fi

$$AAB\underline{B}BABA \to BBB\underline{A}AABA \to AAA\underline{B}BBBA \to BBB\underline{B}AAAA \to BBB\underline{B}AAAA \to \cdots .$$

Găsiți toate perechile (n, k) cu $1 \leqslant k \leqslant 2n$ astfel încât, pentru orice configurație inițială, la un moment al procesului, cele mai din stânga n monede vor fi toate de același tip.

Problema 2. Determinați toate funcțiile $f\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ astfel încât pentru orice $x \in (0, +\infty)$, există exact un singur $y \in (0, +\infty)$ care verifică

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2.$$

Problema 3. Fie k un număr natural nenul și fie S o mulțime finită de numere prime impare. Demonstrați că există cel mult o modalitate (până la rotații și simetrii) de a așeza elementele lui S pe un cerc astfel încât produsul oricăror două numere vecine este de forma $x^2 + x + k$ pentru un număr natural nenul x.

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

marți, 12. iulie 2022

Problema 4. Fie $ABCDE$ un pentagon convex astfel încât $BC = DE$. Presupunem că există un punct T în interiorul lui $ABCDE$ cu $TB = TD$, $TC = TE$ și $\angle ABT = \angle TEA$. Dreapta AB intersectează dreptele CD și CT în punctele P și, respectiv Q. Presupunem că punctele P, B, A și Q sunt așezate în această ordine pe drepta lor. Dreapta AE intersectează dreptele CD și DT în punctele R și, respectiv S. Presupunem că punctele R, E, A și S sunt așezate în această ordine pe drepta lor. Demonstrați că punctele P, S, Q și R sunt pe un cerc.

Problema 5. Determinați toate tripletele de numere naturale nenule (a, b, p) cu p număr prim, astfel încât

$$a^p = b! + p.$$

Problema 6. Fie n un număr natural nenul. Un *pătrat Nordic* este un tablou de tipul $n \times n$ care conține toate numerele naturale de la 1 la n^2 într-o ordine arbitară, astfel încât fiecare celulă (pătrat unitate) conține exact un număr. Două celule diferite sunt adiacente dacă au o latură comună. Se numește *vale* orice celulă care este adiacentă doar cu celule care conțin numere mai mari decât ea. Se numește *drum ascendent* orice secvență de una sau mai multe celule astfel încât:

(i) prima celulă a secvenței este o vale,

(ii) orice două celule consecutive din secvență sunt adiacente, și

(iii) numerele scrise în celulele secvenței sunt în ordine crescătoare.

Determinați, ca funcție de n, cel mai mic număr posibil de drumuri ascedente dintr-un pătrat Nordic.

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.