



Language: Romanian

Day: 2

17 aprilie 2020

**Problema 4.** O permutare a numerelor naturale  $1, 2, \dots, m$  va fi numită *pură* dacă nu există niciun număr întreg pozitiv  $k < m$  astfel încât primele  $k$  numere din permutare să fie  $1, 2, \dots, k$ , într-o ordine oarecare. Fie  $f_m$  numărul permutărilor pure ale numerelor naturale  $1, 2, \dots, m$ .

Demonstrați că  $f_n \geq n \cdot f_{n-1}$ , pentru orice  $n \geq 3$ .

*De exemplu, dacă  $m = 4$ , atunci permutarea  $(3, 1, 4, 2)$  este pură, iar permutarea  $(2, 3, 1, 4)$  nu este pură.*

**Problema 5.** Considerăm triunghiul  $ABC$ , cu  $\angle BCA > 90^\circ$ . Cercul  $\Gamma$  este circumscris triunghiului  $ABC$  și are raza  $R$ . Punctul  $P$  este situat în interiorul segmentului  $AB$  astfel încât  $PB = PC$  și distanța  $PA$  este  $R$ . Mediatoarea segmentului  $PB$  intersectează  $\Gamma$  în punctele  $D$  și  $E$ .

Demonstrați că  $P$  este centrul cercului înscris în triunghiul  $CDE$ .

**Problema 6.** Fie  $m > 1$  un număr întreg. Șirul  $a_1, a_2, a_3, \dots$  este definit prin  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 4$  și, pentru orice  $n \geq 4$ ,

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Determinați toate numerele întregi  $m$  pentru care fiecare termen al șirului este pătrat perfect.

Language: Romanian

Timp: 4 ore și 30 de minute  
Fiecare problemă valorează 7 puncte

**Pentru ca acesta să fie un concurs corect și plăcut pentru toată lumea, vă rugăm să nu menționați, sau să nu faceți vreo referire la probleme pe internet sau pe rețelele de socializare până duminică, 19 aprilie, ora 1:00 am (ora României).**